ISSN 1561 – 5359. Штучний інтелект, 2015, № 3-4

УДК 681.51.033.26

А.А. Несенчук
Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Беларусь
Беларусь, 220012, г. Минск, ул. Сурганова, 6

ДИНАМИКА КОРНЕВОГО ПОРТРЕТА ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ГРАНИЦЕ УСТОЙЧИВОСТИ

A.A. Nesenchuk
United Institute of Informatics Problems of the Belarusian National Academy of Sciences, Belarus
Belarus, 220012, Minsk, Surganov str., 6

DYNAMICS OF THE INTERVAL CONTROL SYSTEM ROOT LOCUS PORTRAIT AT THE STABILITY BOUNDARY

А.А. Несенчук
Об’єднаний інститут проблем інформатики Національної академії наук Білорусі, Білорусь
Білорусь, 220012, м. Мінськ, вул. Сурганова, 6

ДИНАМІКА КОРЕНЕВОГО ПОРТРЕТУ ІНТЕРВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ НА МЕЖІ СТІЙКОСТІ

В статье рассматривается задача определения характера распределения значений параметра корневого годографа интервальной динамической системы вдоль границы устойчивости. Используются поля корневых траекторий. В результате обеспечивается возможность установления значений параметров, при которых система сохраняет устойчивость.
Ключевые слова: интервальная система, динамика, корневой годограф.

The paper considers the task of discovering the nature of distribution of the interval dynamic system root locus parameter values along the stability boundary. Root locus fields are applied. The results obtained provide the possibility for determining the values of parameters ensuring the system stability.
Key words: interval system, dynamics, root locus.

У статті розглядається задача визначення характеру розподілу значень параметру кореневого годографа інтервальної динамічної системи вздовж кордону стійкості. Використовуються поля кореневих траєкторій. У результаті забезпечується можливість встановлення значень параметрів, при яких система зберігає стійкість.
Ключові слова: інтервальна система, динаміка, кореневий портрет.

Существенное значение при синтезе качественных, робастных динамических систем имеет анализ действующих на систему возмущений и вызываемых ими неопределенностей [1–6], установление характера влияния неопределенностей на динамику системы.

Рассмотрим динамическую систему с неопределенностью, описываемую семейством интервальных [3–6] характеристических уравнений (полиномов) вида

$$\sum_{j=0}^{n} a_j s^{n-j} = 0, \qquad (1)$$

где вектор коэффициентов a = (a_0, a_1, …, a_{n-1}, a_n) принадлежит некоторому связному множеству $A \subset R^{n+1}$, $a \in A$, n – степень полинома (целое число); s – комплексное переменное, $s = \sigma + i\omega$.

Интервальное изменение коэффициентов характеристического полинома системы отражает интервальное изменение ее параметров. Предположим, что коэффициенты (1) действительны и изменяются в следующих пределах:

$$\underline{a}_j \le a_j \le \overline{a}_j,\ \ j = \overline{0, n},\ \ a_0 \ne 0, \tag{2}$$

где $\underline{a}_j$ и $\overline{a}_j$ – соответственно минимальное и максимальное значения замкнутого интервала (2) изменения коэффициента a_j.

Одним из эффективных подходов к исследованию данного вопроса является корневой подход [5–9], который по своей природе предполагает вариации параметров и является мощным средством синтеза и анализа, позволяющим представить полную картину изменений, которые происходят в системе в ответ на параметрические вариации.

Сделав в выражении (1) замену переменного, $s = \sigma + i\omega$, запишем его относительно некоторого коэффициента a_k, который назовем варьируемым коэффициентом:

$$a_k = f(s) = -\frac{\phi(s)}{\psi(s)} = u(\sigma, \omega) + iv(\sigma, \omega), \tag{3}$$

где u и v – гармонические функции двух независимых действительных переменных σ и ω; $\phi(s)$ и $\psi(s)$ – некоторые полиномы от комплексного переменного s.

Выражение (3) представляет собой рациональную функцию отображения интервального семейства подобных функций, которая позволяет отображать некоторые образы, заданные в плоскости варьируемого коэффициента a_k, на плоскость комплексного переменного s, т.е. фактически является уравнением корневого годографа системы в общем виде.

Запишем функцию параметра годографа [5, 7],

$$a_k = u(\sigma, \omega)\,, \tag{4}$$

и уравнение корневого годографа Теодорчика–Эванса [5, 7],

$$v(\sigma, \omega) = 0\,. \tag{5}$$

Исследуем поведение функции параметра корневого годографа (4) на границе устойчивости – оси $i\omega$ плоскости корней s. С этой целью рассмотрим семейство F двухпараметрических полей, $F_i \in F$, свободных корневых траекторий Теодорчика – Эванса [5] системы с параметром поля a_{n-1} и исследование будем выполнять для отдельного поля F_i (i = 1, ..., ∞) как характерного представителя интервального семейства полей, при условии $-\infty < a_n < +\infty$, $-\infty < a_{n-1} < +\infty$.

Вначале, подставив значение $\sigma = 0$ в уравнение (4), определим для поля F_i распределение значений функции параметра вдоль оси $i\omega$ плоскости корней:

– при n четном, $n/2$ четном

$$u(\omega) = -a_0\omega^n + a_2\omega^{n-2} - a_4\omega^{n-4} + \ldots - a_{n-4}\omega^4 + a_{n-2}\omega^2 = a_n; \tag{6}$$

– при n четном, $n/2$ нечетном

$$u(\omega) = a_0\omega^n - a_2\omega^{n-2} + a_4\omega^{n-4} - \ldots - a_{n-4}\omega^4 + a_{n-2}\omega^2 = a_n; \tag{7}$$

– при n нечетном, $(n – 1)/2$ четном

$$u(\omega) = – a_1\omega^{n–1} + a_3\omega^{n–3} – a_5\omega^{n–5} + \ldots – a_{n–4}\omega^4 + a_{n–2}\omega^2 = a_n; \qquad (8)$$

– при n нечетном, $(n – 1)/2$ нечетном

$$u(\omega) = a_1\omega^{n–1} – a_3\omega^{n–3} + a_5\omega^{n–5} – \ldots – a_{n–4}\omega^4 + a_{n–2}\omega^2 = a_n. \qquad (9)$$

После подстановки значения $\sigma = 0$ в (5) определим уравнение корневого годографа для оси $i\omega$:

– при n нечетном, $(n – 1)/2$ четном

$$\upsilon(\omega) = a_0\omega^n – a_2\omega^{\,2} + a_4\omega^{n–4} – \ldots – a_{n–3}\omega^3 + a_{n–1}\omega = 0; \qquad (10)$$

– при n нечетном, $(n – 1)/2$ нечетном

$$\upsilon(\omega) = – a_0\omega^n + a_2\omega^{n–2} – a_4\omega^{n–4} + \ldots – a_{n–3}\omega^3 + a_{n–1}\omega = 0; \qquad (11)$$

– при n четном, $n/2$ четном

$$\upsilon(\omega) = – a_1\omega^{n–1} + a_3\omega^{n–3} – a_5\omega^{n–5} + \ldots – a_{n–3}\omega^3 + a_{n–1}\omega = 0; \qquad (12)$$

– при n четном, $n/2$ нечетном

$$\upsilon(\omega) = a_1\omega^{n–1} – a_3\omega^{n–3} + a_5\omega^{n–5} – \ldots – a_{n–3}\omega^3 + a_{n–1}\omega = 0. \qquad (13)$$

Для определения значений координат ω в точках пересечения границы устойчивости ветвями корневых годографов поля используются уравнения корневого годографа (10) – (13). Для определения значений свободного параметра (a_n) в найденных точках применяются выражения (6) – (9).

По причине свойств аналитичности и непрерывности функций (6) – (13) очевидно, что при пересечении годографами поля корневого портрета границы устойчивости (оси iω) на этой оси формируется некоторая многолистная область D^f_ω, и каждая ветвь каждого годографа образует непрерывную подобласть (лист) этой области.

Определение 1. Областью пересечений поля корневых траекторий назовем область пересечений границы асимптотической устойчивости динамической системы ветвями корневых годографов поля корневых траекторий этой системы.

Заданный интервал изменения параметра поля $a_{n–1}$ определяет значения границ реальной области пересечений поля. Для полного поля ($–\infty < a_{n–1} < +\infty$) область пересечений охватывает всю границу устойчивости. Множество координат ω^f_{Di} области пересечений определяется как множество W^f_D.

$$\omega^f_{Di} \in W^f_D,$$

где ω^f_{Di} – значения координат точек области D^f_ω пересечений границы устойчивости ветвями корневых годографов поля; W^f_D – множество координат ω^f_{Di} точек области D^f_ω. Множество значений параметра a^f_{Di} в точках ω^f_{Di} обозначается как $A^f_{\omega_D}$,

$$a^f_{Di} \in A^f_{\omega_D}.$$

С целью определения максимального и минимального значений функции параметра в области D_ω^f выполняется ее исследование на экстремум при помощи первой производной. Производная u′(ω) от функции параметра (6) – (9) приравнивается нулю:

n четное, *n*/2 четное:

$$u'(\omega) = + na_0\omega^{n-1} - (n-2)a_2\omega^{n-3} + (n-4)a_4\omega^{n-5} - \ldots + 4a_{n-4}\omega^3 - 2a_{n-2}\omega = 0. \qquad (14)$$

n четное, *n*/2 нечетное:

$$u'(\omega) = na_0\omega^{n-1} - (n-2)a_2\omega^{n-3} + (n-4)a_4\omega^{n-5} - \ldots - 4a_{n-4}\omega^3 + 2a_{n-2}\omega = 0. \qquad (15)$$

n нечетное, (*n* – 1)/2 четное:

$$u'(\omega) = -(n-1)a_1\omega^{n-2} + (n-3)a_3\omega^{n-4} - (n-5)\,a_5\omega^{n-6} + \ldots - 4a_{n-4}\omega^3 + 2a_{n-2}\omega = 0. \qquad (16)$$

n нечетное, (*n* – 1)/2 нечетное:

$$u'(\omega) = (n-1)a_1\omega^{n-2} - (n-3)a_3\omega^{n-4} + (n-5)a_5\omega^{n-6} - \ldots - 4a_{n-4}\omega^3 + 2a_{n-2}\omega = 0. \qquad (17)$$

Из четырех последних уравнений определяются координаты $\omega_{e\,i}^f$ точек экстремума функции параметра на границе устойчивости:

$$\omega_{e\,i}^f \in W_e^f, \qquad (18)$$

где W_e^f – множество координат точек экстремума $\omega_{e\,i}^f$.

Для определения множества $A_{\omega\,e}^f$ экстремальных значений $a_{e\,i}^f$ параметра в точках (18) используется выражение

$$a_{e\,i}^f \in A_{\omega\,e}^f.$$

С целью получения экстремальных значений свободного параметра множества $A_{\omega\,e}^f$ используются выражения (6) – (9), в которые подставляются предварительно вычисленные из уравнений (14) – (17) соответствующие значения $\omega_{e\,i}^f$.

Максимальное значение параметра $a_{\omega\max}^f$ на границе устойчивости определяется выражением

$$a_{\omega\max}^f = \sup A_{\omega\,e}^f, \qquad (19)$$

минимальное значение параметра $a_{\omega\min}^f$ на границе устойчивости выражением

$$a_{\omega\min}^f = \inf A_{\omega\,e}^f. \qquad (20)$$

Значение ω в точке $a_{\omega\max}^f$ обозначается как $\omega_{e\max}^f$, а значение ω в точке $a_{\omega\min}^f$ как $\omega_{e\min}^f$.

На рис. 1 представлен пример (эскиз) графика распределения функции параметра вдоль границы устойчивости при рассмотрении полного поля [5]

корневых траекторий системы. На графике с целью упрощения соединяющие вершины кривые изображены прямыми линиями. Знаком «+» на рис. 1 обозначаются участки возрастания функции, знаком «–» – убывания. В соответствии со свойствами корневых портретов систем, приведенными в [5], при положительных значениях коэффициентов характеристического уравнения системы на графике, начиная от нулевой точки по направлениям вверх и вниз, вначале располагаются участки возрастания (при значении параметра поля $a_{n-1} = 0$ в начале координат располагаются две начальные точки, на правой действительной полуоси начальные точки отсутствуют). Далее имеет место чередование знаков соответствующих участков. Чередование участков имеет место в пределах определенной области E_ω^f на границе устойчивости, называемой областью экстремумов. За пределами области экстремумов функция имеет монотонно возрастающий/убывающий характер.

Определение 2. Областью экстремумов функции параметра корневого годографа на границе устойчивости системы назовем область, в пределах которой располагаются точки экстремума (19) – (20) этой функции.

В пределах поля корневых траекторий область экстремумов определяется максимальной $\overline{\omega}_e^f$ и минимальной $\underline{\omega}_e^f$ границами (рис. 1), которые вычисляются из следующих выражений:

$$\overline{\omega}_e^f = \sup W_e^f$$

и

$$\underline{\omega}_e^f = \inf W_e^f .$$

Таким образом, область пересечений D_ω^f при рассмотрении полного поля разделяется на три следующие области (рис. 1):

– область экстремумов E_ω^f, определяемую в пределах

$$\underline{\omega}_e^f \le \omega_{e_i}^f \le \overline{\omega}_e^f ;$$

– область возрастания/убывания функции параметра верхнюю $D_{\omega t}^f$, определяемую в пределах

$$\overline{\omega}_e^f \le \omega_{D_i}^f < +\infty; \tag{21}$$

– область возрастания/убывания функции параметра нижнюю $D_{\omega b}^f$, определяемую в пределах

$$-\infty < \omega_{D_i}^f \le \underline{\omega}_e^f . \tag{22}$$

Следует отметить, что реальные границы области пересечения границы устойчивости ветвями годографов заданного поля, определяемые интервалом вариации параметра поля, и границы этой области, определяемые выражениями (21) – (22) для полного поля, могут не совпадать.

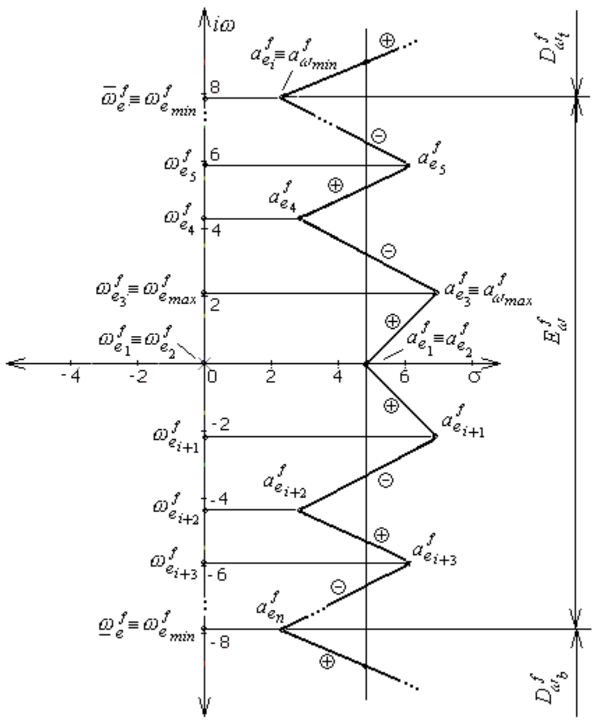


Рис. 1. Распределение значений функции параметра вдоль границы устойчивости. Область экстремумов

При задании определенных границ интервалов вариации параметра поля (когда поле не является полным) область пересечений D_{ω}^{f} не бесконечна, т.е. является ограниченной. Максимальная $\overline{\omega}_D^f$ и минимальная $\underline{\omega}_D^f$ координаты, ограничивающие область пересечений, определяются из уравнения корневого годографа (10) – (13), которое описывает динамику координат точек пересечения на границе устойчивости.

Перепишем уравнение корневого годографа, например (13), относительно параметра поля a_{n-1}:

$$-a_0\omega^{n-1} + a_2\omega^{n-3} - a^4\omega^{n-5} + \ldots + a_{n-3}\omega^2 = a_{n-1}. \qquad (23)$$

Функция (23) является аналитической непрерывной аналогично функциям (6) – (9), и характер распределения значений параметра поля a_{n-1} вдоль границы асимптотической устойчивости аналогичен характеру распределения значений свободного параметра a_n, которое было рассмотрено выше (рис. 1), т.е. представляет собой чередование возрастающих и убывающих участков на соответствующем графике. Следовательно, граничные значения ω, $\overline{\omega}_D^f$ и $\underline{\omega}_D^f$, соответствуют предельным значениям интервала вариации параметра поля a_{n-1}, и для определения реальных границ области пересечений ветвями годографов поля границы устойчивости необходимо найти конечное множество $W_{D\,г}^{f}$ координат этих граничных значений (для каждого участка области пересечений в общем случае их будет два). Для этого необходимо решить уравнение (23), подставив в него предварительно вначале максимальное $\overline{a}_{n-1}$:

$$-a_0\omega^{n-1} + a_2\omega^{n-3} - a^4\omega^{n-5} + \ldots + a_{n-3}\,\omega^2 = \overline{a}_{n-1},$$

а затем минимальное $\underline{a}_{n-1}$:

$$-a_0\omega^{n-1} + a_2\omega^{n-3} - a^4\omega^{n-5} + \ldots + a_{n-3}\,\omega^2 = \underline{a}_{n-1}$$

значения заданных интервалов изменения параметра поля и выбрав из числа полученных корней $\omega^f_{гi}$ максимальное $\overline{\omega}^f_D$ и минимальное $\underline{\omega}^f_D$ значения:

$$\overline{\omega}^f_D = \sup W^f_{D\,г};$$

$$\underline{\omega}^f_D = \inf W^f_{D\,г}.$$

Аналогично следует поступать и в случаях использования уравнений (10) – (12).

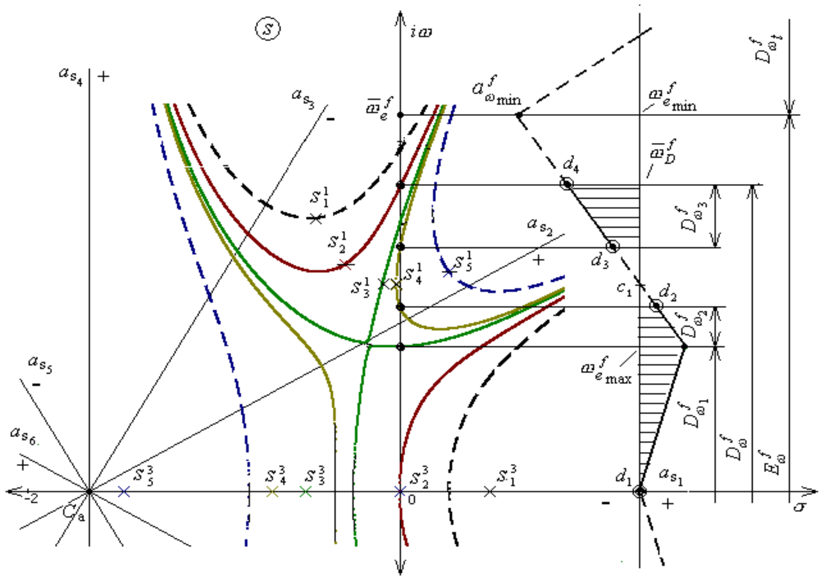


Рис. 2. Область пересечений границы устойчивости $i\omega$ ветвями годографов поля корневых траекторий системы шестого порядка. Реальная область пересечений

Пример реальной области пересечений, лежащей в пределах области экстремумов, приведен на рис. 2, где представлено поле корневых траекторий динамической системы шестого порядка. Полная область пересечений при изменении параметра поля a_{n-1}=a_5 в пределах $0 \le a_5 < +\infty$ на этом рисунке обозначена как D^f_ω. Реальная область пересечений, формируемая при $0 \le a_5 < a'_5$ (где a'_5 – некоторое заданное значение параметра поля), которую обозначим как $D^f_{\omega\,R}$, (имеется в виду ее часть, расположенная в верхней полуплоскости) состоит из подобластей $D^f_{\omega\,1}$, $D^f_{\omega\,2}$ и $D^f_{\omega\,3}$, формируемых при пересечении границы устойчивости одной из двух пересекающих эту границу ветвей каждого годографа поля, т.е. $D^f_{\varpi\,R} = D^f_{\omega\,1} + D^f_{\omega\,2} + D^f_{\omega\,3}$. Годограф, показанный штриховой линией, не рассматривается, поскольку он полностью не устойчив.

Следует отметить, что границы $\overline{\omega}^f_D$ и $\underline{\omega}^f_D$ реальной области пересечений заданного поля могут различным образом располагаться по отношению к

границам области экстремумов. Например, реальная область пересечений может включать в себя всю область экстремумов или только ее некоторую часть (рис. 2), а также располагаться за пределами области экстремумов, т.е. быть частью рассмотренных выше областей $D^f_{\omega t}$ и $D^f_{\omega b}$, лежащих за пределами области пересечений.

Буквами d_1–d_4 отмечены граничные точки диаграммы (заштрихованные участки) распределения значений свободного параметра a_n годографа вдоль границы устойчивости в пределах реальной области пересечений для заданных границ изменения параметра поля, $a_{n-1} = a_5$.

Для определения экстремальных значений функции параметра корневого годографа на границе устойчивости для всего интервального семейства годографов корневого портрета системы необходимо в выражения (6) – (9) подставить соответствующие значения границ интервалов изменения коэффициентов: от a_1 до a_{n-2}.

Литература

1. Ackermann, J. Robust Control: The Parameter Space Approach / J. Ackermann. – London: Springer Verlag, 2002. – 495 p.
2. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2009. – 831 с.
3. Поляк, Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
4. Поляк, Б.Т. Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств / Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, П.С. Щербаков – М.: Ленанд, 2014. – 560 с.
5. Несенчук, А.А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А.А. Несенчук. – Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2005. – 234 с.
6. Несенчук, А.А. Корневой метод синтеза устойчивых полиномов путем настройки всех коэффициентов / А.А. Несенчук // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 8. – С. 13–24.
7. Римский, Г.В. Автоматизация исследований динамических систем / Г.В. Римский, В.В. Таборовец. – Мн.: Наука и техника, 1978. – 336 с.
8. Ewans, W.R. Graphical analysis of control systems / W.R. Ewans // Trans. AIEE. – 1948 . – Vol. 67. – P. 547–551.
9. Barmish, B.R. The robust root locus / B.R. Barmish, R. Tempo // Automatica. – 1993. – Vol. 26. – P. 183–192.

Literatura

1. Ackermann, J. Robust Control: The Parameter Space Approach / J. Ackermann. – London: Springer Verlag, 2002. – 495 p.
2. Dorf, R. Modern Control Systems / R. Dorf, R. Bishop. – M.: Laboratoriya Bazovykh Znanij, 2009. – 832 p.
3. Polyak, B.T. Robust Stability and Control / B.T. Polyak, P.S. Scherbakov. – M.: Nauka, 2002. – 303 p.
4. Polyak, B.T. Linear Systems Control Under External Perturbations: Technique of Linear Matrix Inequalities / B.T. Polyak, M.V. Khlebnikov, P.S. Scherbakov. – M.: Lenand, 2014. – 560 p.
5. Nesenchuk, A.A. Analysis and Synthesis of Robust Dynamic Systems on the Basis of the Root Locus Approach / A.A. Nesenchuk. – Minsk: UIIP NAN of Belarus, 2005. – 234 p.
6. Nesenchuk, A.A. Root Locus Method for Synthesis of Stable Polynomials by Setting-Up All Coefficients / A.A. Nesenchuk // Avtomatika i Telemekhanika. – 2010. – № 8. – P. 13–24.
7. Rimsky, G.V. Computer-Aided Investigation of Control Systems / G.V. Rimsky, V.V. Taborovets. – Minsk: Nauka i Tekhnika, 1978. – 336 p.
8. Ewans, W.R. Graphical analysis of control systems / W.R. Ewans // Trans. AIEE. – 1948 . – Vol. 67. – P. 547–551.
9 Barmish, B.R. The robust root locus / B.R. Barmish, R. Tempo // Automatica. – 1993. – Vol. 26. – P. 183–192.

RESUME

A.A. Nesenchuk

Dynamics of the Interval Control System Root Locus Portrait at the Stability Boundary

The paper deals with investigation of the problem of automatic control systems robustness, i.e. the effect of the plant parameters substantial deviations (variations) within the control system structure, causing system parametric uncertainty, upon the system dynamics, its stability and operation quality. Dynamic systems with interval parametric uncertainties have been considered. Investigation of the systems behavior in conditions of parametric variations has been carried out. For this purpose the Teodorchik – Ewans free root locus portraits and fields have been applied. The system root locus portrait is represented by the family (the set) of two-parameter root locus fields inhering similar properties which define the properties of the system as a whole. The principles for generating the diagram of the system root locus parameter distribution along the stability boundary for the root locus field have been obtained, which are applied for finding intervals of parameters ensuring the system robust stability.

Further evaluation of the work could be directed to working out the technique for calculating dynamic system characteristic equation coefficients and parameters ensuring its robust stability and robust quality, based on the discovered regularities of the variable system parameters values distribution along the stability boundary.

А.А. Несенчук

Динамика корневого портрета интервальной системы на границе устойчивости

Статья посвящена изучению вопроса робастности автоматических систем, а именно, влияния существенных отклонений (вариаций) параметров объектов управления в структуре систем автоматического управления, вызывающих параметрическую неопределенность, на динамику системы, ее устойчивость и качество функционирования. Рассмотрены динамические системы с параметрической неопределенностью интервального характера. Выполнено исследование поведения систем в условиях параметрических вариаций. С этой целью использованы свободные корневые портреты и поля корневых траекторий Теодорчика – Эванса. Корневой портрет системы представлен семейством (множеством) двухпараметрических полей корневых траекторий, обладающих одинаковыми свойствами, определяющими свойства всего портрета в целом. Определены принципы построения диаграммы распределения значений параметра корневого годографа для поля корневых траекторий динамической системы вдоль границы устойчивости. На основании подобной диаграммы могут быть установлены интервалы изменения значений параметров системы (интервалы неопределенности), при которых данная система является робастно устойчивой.

Дальнейшее развитие работы может проходить в направлении разработки методики расчета коэффициентов характеристического уравнения и параметров динамической системы, обеспечивающих ее робастную устойчивость и робастное качество, основанной на установленных закономерностях распределения значений варьируемых параметров системы вдоль границы устойчивости.

Поступила в редакцию 29.08.2015